SGC ライブラリ 64　代数幾何入門講義 サポートページ

小林正典　最終更新日：平成 24 年 1 月 18 日

内容は随時追加していきます.

訂正・追加

$p.2$ $l.20$ 「に限る」→「に限りしかも異なる」

$p.4$ $l.4$ 「極大条件を」→「$\mathscr{I}$ が極大条件を」

$p.4$ $l.-11$ 「最高次の項」→「x^n」

$p.4$ $l.-6$ 「ax^n」→「$a_j^{(n)}x^n$」

$p.4$ $l.-2$ 「a_j」→「$a_j^{(n)}$」

$p.7$ $l.-2$ 「表されるが」→「表されるが（特に $J, J' \neq R$)」

$p.9$ $l.-1$ 「定理 1.3.1」→「系 1.3.2」

$p.10$ $l.-7$ 「有限部分集合」→「真の有限部分集合」

$p.13$ $l.11$ 「代数的集合」→「空でない代数的集合」

$p.15$ $l.1$ 「ある」の前に「k が代数的閉体のとき」を追加

$p.15$ $l.2$ 「一般に,」の後に「環 R において」を追加

$p.15$ $l.3$ 「環 R」→「R」

$p.18$ $l.16$ 「開基になる.」の後に「$D(f)$ を基本開集合と呼ぶ.」を追加

$p.19$ $l.16$ 「$V(f_\lambda)$」→「$V((f_\lambda))$」

$p.20$ $l.1$ 「$= V(I)$」の前に「)」

$p.20$ $l.-2$ 「定まる.」の後に「f は包含関係を保つ.」を追加.

$p.22$ $l.13$ 「つまり,」を取る

$p.23$ $l.-10$ 「同相になることは」の前に,「i^{-1} は包含関係を保つ. i^a は連続であるから」を挿入

$p.23$ $l.-8$ 「$\{P \cap S\} = \varnothing$」→「$\{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \cap S\} = \varnothing$」

$p.24$ $l.16$ 「有限 A 加群」→「有限生成 A 加群」

$p.25$ $l.6$ 「ザリスキー接空間」の後に「(Zariski tangent space)」を追加

$p.25$ $l.-5$ 「定理 1.4.3 の $z_1, \dots, z_d$ を」→「有限生成 k 代数である場合の定理 1.4.3 の $z_1, \dots, z_d$ のように，$A/(z_1, \dots, z_d)A$ が長さ有限となるような $z_1, \dots, z_d \in m$ を」

$p.27$ $l.-4$ 「$M \cong M^* \cong M^{**}$」の前に「双対基底が存在して」を追加

$p.29$ $l.-12$ 「写像」→「R 双線形写像」

$p.29$ $l.-2$ 「とするとき」→「とすると π は R 双線形である.」

$p.29$ $l.-1$ 「と定める」→「(一般には $\boldsymbol{Z}$ 線形で拡張する）と定める」

$p.30$ $l.-3$ 次を追加：「しかも $M_1 \to M_2$ を R 加群の準同型とするとき，対応してできる準同型

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(L\otimes M_1,N) & \to & \mathrm{Hom}(M_1,\mathrm{Hom}(L,N)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}(L\otimes M_2,N) & \to & \mathrm{Hom}(M_2,\mathrm{Hom}(L,N))
\end{array}
$$

において，左下から右上への 2 通りの合成は一致する.」

$p.31$ $l.12$ 「で定める」→「(一般には $\boldsymbol{Z}$ 線形で拡張する）で定める」

$p.31$ $l.{-3}$ 直前に次を追加：「R 加群 M，R' 加群 N に対し，$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は自然に R' 加群になる（$p.41$ と同様）.」

$p.31$ $l.{-3}$ 「に対し」→「に対し R' 加群として」

$p.33$ $l.{-9}$ 「あるから」→「ある．特に」

$p.37$ $l.9$ 「が互いに素であるとき」→「に対し」

$p.39$ $l.{-8}$ 最後に追加：「合成は写像の合成，恒等射は恒等変換とする.」

$p.40$ $l.{-12}$ の直前に挿入 「1_X は同型である．また，同型射の合成は同型射である.」

$p.42$ $l.15$ 「**例**」→「**定義**」

$p.42$ $l.{-13}$ 「$\boldsymbol{Z}$」→「{ 正の整数 }」

$p.46$ $l.9$ 「関手であって，射の対応」→「関手 F で，任意の X,Y に対し $\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$」

$p.47$ $l.2$ 「$\mathrm{Hom}(X\times X',Y\times Y')$」→「$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{C}'}((X,X'),(Y,Y'))$」

$p.47$ $l.{-9},{-10}$ 「f」→「F」（2 箇所）

$p.47$ $l.{-4}$ 最後のピリオドを取る

$p.47$ $l.{-2}$ 「$\mathrm{Hom}(F,h^X)$」→「$\mathrm{Hom}(h^X,F)$」

$p.48$ $l.9$ 「$F(u)\circ\varphi(X)(1_X)\circ u$」→「$F(u)\circ\varphi(X)(1_X)=\varphi(Y)(u\circ 1_X)$」

$p.48$ $l.12$ 「充満忠実関手」→「充満忠実関手 h :」

$p.48$ $l.15$ 「$\mathrm{Hom}(h^Y,h^X)\cong h^Y(X)=\mathrm{Hom}(Y,X)$」→「$\mathrm{Hom}(h^X,h^Y)=\mathrm{Hom}(X,Y)$」

$p.48$ $l.{-6}$ 「逆射」→「恒等射・逆射」

$p.48$ $l.{-4}$ 「自然数」→「正の整数」

$p.50$ $l.11$ 「微分可能」→「可微分多様体上の関数が微分可能」

$p.52$ $l.11$ 「可換になる）.」のあとに「合成は結合法則を満たす」を追加

$p.54$ $l.9$ 「開集合」→「空でない開集合」

$p.54$ $l.13$ 「0」→「$\{0\}$」

$p.56$ $l.8$ 「$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda)$」→「$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda(U_\lambda)$」

$p.56$ $l.8$ 「$\prod_{\lambda,\mu\in\Lambda}\mathscr{F}(U_{\lambda\mu})$」→「$\prod_{\lambda,\mu\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda(U_{\lambda\mu})$」

$p.56$ $l.17$ 「記号では」→「層空間を」

$p.58$ $l.1$ 「$a(x)$」→「$a(x)_x$」

$p.59$ $l.{-5}$ 「$f\in\ker(U)$」→「$f\in\ker\varphi(U)$」

$p.61$ $l.4$ 「茎」→「芽」

p.63 l.-13 「$s(p)$」→「$s(P)$」

p.66 l.-2 「$\varphi_{\lambda\mu}$」→「$\varphi_{\mu\lambda}$」

p.67 l.1 「φ_λ」→「$\varphi_{\mu\lambda}$」

p.69 l.-1 「これら」→「最初の 3 つ」

p.70 l.9 「命題」→「$V \cap X_\lambda$ は既約なので，命題」

p.70 l.-1 「任意の」→「空でない任意の」

p.71 l.4 「$\coprod$」→「$\bigcup$」

p.71 l.14 「よい.」→「よい．$f = 0$ を示すにはさらに U がアフィンであるとしてよい.」

p.71 l.16 「全単射」→「命題 3.3.2 より同相」

p.71 l.-4 「体」→「素体」

p.71 l.-1 「部分集合」→「有限部分集合」

p.77 l.18 「$\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$」→「$\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x$」

p.82 l.16 「ただし環 R に対し，$\operatorname{Spec} R[x_1, \ldots, x_n]$ を $\boldsymbol{A}_R^n$ と書き，$R = \boldsymbol{Z}$ のときは単に $\boldsymbol{A}^n$ で表す.」を最後に追加.

p.83 ll.14–17 「線形束」→「直線束」

※「線形束」は vector bundle の訳語です．p.168（索引）もそれに伴い訂正いたします.

p.86 l.11 「閉部分概型」→「閉埋め込み」

p.86 l.12 「同型」→「同値」

p.88 ll.-7, -8 「アフィン」→「開」

p.89 l.2 「X_λ，Y_λ を」→「X_λ を」

p.89 l.3 「$X_\lambda \times_S Y_\lambda$」→「$X_\lambda \times_S Y$」

p.89 l.7 「p」→「(p)」

p.89 l.15 「base change 」→「base change」（空白を詰める）

p.93 l.-9 「次のように」→「系 5.5.2 を用いて次のように」

p.96 l.-9 「局所自由 $\mathscr{O}$ 加群」→「0 でない局所自由 $\mathscr{O}$ 加群」

p.97 l.16 「微分形式」→「1 次微分形式」

p.100 ll.2–3 「3. 命題 4.4.6 の後半を用いる.」に差し替え

p.100 l.4 「A 加群」→「B 加群」

p.100 l.9 「R 加群」→「B 加群」

p.100 l.10 「$\operatorname{Hom}_R(I/I^2, M)$」→「$\operatorname{Hom}_B(I/I^2, M)$」

p.103 l.15 「U_i に対する無限遠超平面という.」を最後に追加.

p.103 l.-2 「変換」→「k 線形変換」

p.104 l.5 「点 P で」→「k の標数は l の約数でないとする．点 P で」

p.104 l.-2 「cubic」→「plane cubic」

p.120 l.-3 「次の」→「条件 $f \circ \iota = 0$ と次の」

p.121 l.7 「$\ker f \to A$ は単射，f と合成した $\ker f \to B$ は零射になる.」→「ψ

の一意性より，$\ker f \to A$ は単射になる.」

$p.121$ $l.8$ 「次の」→「条件 $\pi \circ f = 0$ と次の」

$p.124$ $l.13$ 「$\mathrm{pr}_\lambda \circ \psi_\lambda \circ f$」→「$\mathrm{pr}_\lambda \circ \psi \circ f$」

$p.124$ $ll.13, 14$ 「pr_λ は全射なので $\psi_\lambda \circ f$」→「直積の普遍写像性質より $\mathrm{pr}_\lambda \circ \psi \circ f$」

$p.124$ $l.18$ 「I は入射的」→「$I \oplus J$ は入射的」

$p.125$ $l.2$「M は射影 R 加群なので」→「M は有限生成なので全射 $\pi : R^n \to M$ が存在する．M は射影 R 加群なので id_M は π を経由し」

$p.125$ $l.{-16}$ 「全順序」の前に「(M, f) を含むので空でない.」を入れる.

$p.125$ $l.{-14}$ 「$\{bx \in M' \mid b \in \boldsymbol{Z}\}$」→「$\{b \in \boldsymbol{Z} \mid bx \in M'\}$」

$p.128$ $ll.9, 10$ 「$\mathscr{I}_x$」→「I_x」

$p.128$ $l.15$ 「茎ごとに f_x」→「開集合 U ごとに $f(U)$」

$p.133$ $l.12$ 「自然同値」→「自然同型」

$p.135$ $ll.3, 6, 9$「$\mathrm{coker}\, d^{p-1}$」→「$\mathrm{coker}\, F(d^{p-1})$」,「$\mathrm{coker}\, e^{p-1}$」→「$\mathrm{coker}\, F(e^{p-1})$」

$p.136$ $l.{-6}$ 「h^0」→「k^0」

$p.137$ $l.11$ 「ϵ」→「ε」

$p.137$ $ll.14, 15$ 「$R^0F(f^0)$」→「$R^0F(f)$」,「$R^0F(g^0)$」→「$R^0F(g)$」

$p.139$ $l.6$ 「$R^p(1_A)$」→「$R^pF(1_A)$」

$p.139$ $l.7$ 「$R^p(1_B)$」→「$R^pF(1_B)$」

$p.140$ $l.8$ 「$\mathrm{coker}\, d'^p$」→「$\mathrm{coker}\, d'^{p-1}$」

$p.140$ $l.{-5}$ 「K^p」→「$d'^{p-1} \circ K^p$」

$p.141$ $l.{-2}$ 「f」→「F」

$p.145$ $l.1$ 図 $\mathit{\Delta}^1$ はすべて $\mathit{\Delta}_1$

$p.146$ $l.12$ 「$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k f_{\beta_0 \cdots \hat{\beta_k} \cdots \beta_{p+1}}$」→「$\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k f_{\beta_0 \cdots \hat{\beta_k} \cdots \beta_{p+1}}$ の制限」

$p.161$ $l.{-4}$ 「**開近傍**」→「x の**開近傍**」

$p.163$ $l.{-11}$ 「開集合」→「空でない開集合」

$p.163$ $l.{-4}$ 「D^n」→「D^{n+1}」

$p.168$ $l.$ 右 -18 「線形束 83」を削除

$p.169$ $l.$ 右 3 「直線束 83」を追加

Thanks to 大前健さん，坂内真三さん，村山健太さん，土田雅裕さん，金倉崇明さん，沖本吉生さん.

参考・補足

p.19 系 3.2.5 3.：

これより，p.65 で定義されるアフィン概型は準コンパクトである．このことは p.70 命題 7.5.1 で用いられる．

p.20 参考図

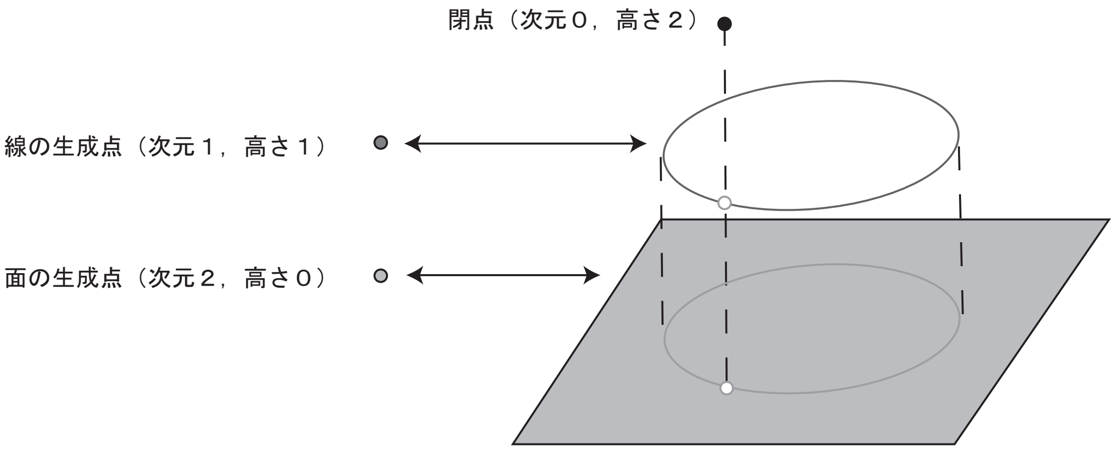

図 1　生成点

p.33 l.-11 例：

線形空間の任意の部分空間には補空間が存在する．実際，ツォルンの補題より，部分空間の基底は全体の基底に延長できる．追加したベクトルで張られる空間が補空間である．

p.88 補題 9.1.2 の証明：

Hom のファイバー積は，集合の圏で考える．

p.162 連続写像の項に補足：

f が**開** (open) とは，X の任意の開集合 U に対して $f(U)$ が開集合となることをいう．同様に**閉** (closed) とは，閉集合の像が閉集合となることをいう．全単射連続写像は，開（または閉）であることが同相であることと同値である．

参考文献について

[1] から [21] までは，グロタンディック流の代数幾何の基礎付けにつながるものを，網羅的ではありませんが，だいたい初出の年代順に並べてあります．

第 5 章については，拙著

圏と関手，数理科学 2008 年 3 月号 (2008) 7–12, サイエンス社.

も参考になると思います.

章末問題解答

1.1 ヒントの通り．

1.2 ヒントの通り．

2.1 IJ の元は fg（$f \in I$，$g \in J$）の形の元の有限和である．

$IJ \subset I \cap J \subset I, J$ であるから，$V(IJ) \supset V(I \cap J) \supset V(I) \cup V(J)$. $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ であるからすべて等しい．

$R = \boldsymbol{Z}$ において，$I = (4)$，$J = (6)$ とすると，$I \cap J = (12) \neq (24) = IJ$ である．

2.2 多項式写像 $\varphi : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[y_1, \ldots, y_m]$ の閉集合 $V(J)$ の逆像は $V(\varphi(J))$ であるから．

2.3 整域 $k[s,t]$ の部分環であるから被約（整域）である．全射 k 代数準同型 $\varphi : k[x,y,z] \to k[s^n, st, t^n]$ を，$x \mapsto s^n$，$y \mapsto st$，$z \mapsto t^n$ で定める．

$I = (y^n - xz)$ とすると，$I \subset \ker \varphi$ は明らか．$f \in \ker \varphi$ とする．f を y の多項式として $y^n - xz$ で割った余りを r とすると，r の y に関する次数は $n-1$ 次以下．y に関して 1 次以上の項が存在したとすると，$\varphi(r)$ の s に関する次数をみて矛盾．よって r は y に関して定数．よって，$\varphi(r)$ は s^n，t^n の多項式であるから，$\varphi(r) = 0$ となるのは $r = 0$ に限る．よって $\ker \varphi \subset I$ も言えたので，$k[s^n, st, t^n] \cong k[x,y,z]/(y^n - xz)$.

2.4 整域 $k[x_1, x_2, y_1, y_2]$ の部分環であるから整域である．全射 k 代数準同型 $\varphi : k[x,y,z,w] \to k[x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2]$ を，$x \mapsto x_1y_1$，$y \mapsto x_1y_2$，$z \mapsto x_2y_1$，$w \mapsto x_2y_2$ で定める．$I = (y^2 - xz, xw - yz, z^2 - yw)$ とすると，明らかに $I \subset \ker \varphi$ である．$k[x,y,z,w] \to k[t]$ を $x \mapsto t$，$y \mapsto t^2$，$z \mapsto t^3$，$w \mapsto t^4$ で定める．

3.1 (a) $\{(0),\ (x-a) \mid a \in \boldsymbol{C}\}$ (b) $\{(0)\} \cup \{(x-a) \mid a \in \boldsymbol{R}\} \cup \{(x^2 + bx + c) \mid b, c \in \boldsymbol{R}, b^2 - 4c < 0\}$

3.2 k を体，n を正の整数として，$A = k[x]/(x^{n+1})$ とすると，$\operatorname{Spec} A = \{(0)\}$.

3.3 (a) P, Q を A の相異なる素イデアルとする．$P \not\subset Q$ または $Q \not\subset P$ が成り立つから，$V(P) \not\ni Q$ または $V(Q) \not\ni P$．前者のとき $V(P)^c$ は Q の開近傍で P を含まない．後者のとき $V(Q)^c$ は P の開近傍で Q を含まない．(b) T_0 空間 X の点 P, Q に対し，$X = \overline{\{P\}} = \overline{\{Q\}}$ とする．$P \neq Q$ ならば，P の開近傍 U で Q を含まないものか，Q の開近傍 V で P を含まないものが存在する．前者のとき $P \notin \overline{\{Q\}} = X$ となり矛盾．後者も同様．よって $P = Q$.

5.1 1_X，$1'_X$ が X の恒等射であるとすると，$1'_X = 1'_X \circ 1_X = 1_X$．$g, g'$ が f の逆射であるとすると，$g' = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = g$.

5.2 $\operatorname{Mor}(\mathscr{C}) = \bigcup_{(X,Y) \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C}) \times \operatorname{Ob}(\mathscr{C})} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ である．集合 $\operatorname{Ob}(\mathscr{C}) \times \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ で添え字付けされた，集合 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ の直和は，集合である．

7.2 $\boldsymbol{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ であるから，自己同型は $k[x]$ の環同型と対応する．$\varphi \in \operatorname{Aut} k[x]$ とする．$\varphi(1) = 1$ から素体では $\varphi(b) = b$（$b \in k$）が従う．

$\varphi(k[x]) = k[\varphi(x)]$ である．よって $\varphi(x)$ の像が定数，あるいは 2 次以上の式の場合は x が像に含まれなくなり矛盾．x の像は 1 次式 $ax+b$（$a \in k^\times$，$b \in k$）でなければならない．これを行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応させ，環同型の合成を行列の積と対応させることで，群の同型を得ることが確かめられる．